압축센싱 기반의 다중 센서 시스템에 대한 Joint Typicality를 활용한 정보 이론적 한계 분석

박상준, 이준호, 이홍노*
광주과학기술원 정보통신공학과
e-mail : sjpark1@gist.ac.kr, ljh8097@gmail.com, heungno@gist.ac.kr*

Analysis of Joint Typicality Based Information-theoretic Limits on Multiple Sensor System Based on Compressive Sensing

Sangjun Park, Junho Lee, Heung-No Lee*
School of Information and Communications, GIST

Abstract

We investigate in an information theoretic way the possibility of distributed sensing and sampling for Multiple Sensor System(MMS) in which sensors take samples while compressing the signal with linear projections using the idea of compressive sensisng(CS). In particular, we obtain a bound for per-sensor measurements(PSM), the number of compressive sensing measurements required at each semsor for good signal recovery.

I. 서 론

Compressive Sensing(CS)[1][2]은 신 개념의 sampling 이론으로서 2005년 Information Theory에 발표된 이후로 활발한 연구가 진행되어 오고 있다. CS 이론은 신호가 압축 가능하다는 사전 정보를 이용하여 신호를 취득 하는 시점에서 선형 압축된 신호를 얻는 것이 핵심 내용이다. 기존의 Shannon-Nyquist 이론은 신호에 대해 신호의 최대 주파수 2배에 해당하는 비율로 샘플을 균등하게 취득한 후 신호의 전송 또는 저장을 위해 또 다른 압축과정을 거치게 되는 반면 CS는 위에서 설명한 된바와 같이 신호를 얻음과 동시에 선형 압축된 신호를 얻기 때문에 별도의 신호 처리를 위한 에너지 소비를 요구하지 않는 장점을 갖는다.

이와 같은 특징으로부터 CS이론은 신호의 취득과 관련된 많은 분야에 사용1)이 될 것으로 간주되어지고 있다. 대표적인 예로서는 Charge Coupled Devised (CCD) Array Camera, Wireless Sensor Network (WSN) 등이 대표적이다. 위에 언급한 다중센서 시스템(Multiple Sensor System : MSS)들의 공통점은 하나의 현상을 관찰을 하기 위하여 여러 개의 센서를 이용한다는 점이다. 이 사실에 비추어 볼 때 본 논문에서는 인접 센서들이 취득한 신호들이 높은 상관성을 지님을 활용한다. 따라서 앞서 제시한 CS이론과 다중 센서들이 취득한 신호들의 상관성를 활용하면 보다 적은 양의 선형 압축신호만으로 측정되는 원신호들을 표현할 수 있다. 이러한 점은 WSN과 같이 센서들의 배터리가 한정 된 곳에서 더욱 큰 이득을 얻을 수 있다. 왜냐하면 각 센서들이 보내는 신호의 양이 줄이면서도 현상의 해상도를 유지를 한다면 이는 센서들이 수명이 증가하기 때문이다.

본 논문에서는 CS이론과 정보이론에 입각한 Joint Typicality 개념을 활용하여, 센서의 수가 증가됨에 따라 각 센서에서 정확한 복원을 위해 필요한 선형 압축신호 양의 한계를 보이고자 한다.

---

1) * 교신저자

2) 이 논문은 2010년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구임 (No.2010-0017944)

II. 본 론

A. System Model

첫 번째로, 각 센서당 얻게 되는 선형 압축된 신호들은 다음과 같다.

$$r_s = F_s x_s + n \tag{1}$$

F_s는 측정행렬$(M\times N)$로서 각각의 열벡터는 $N(0,M)$ 분포를 따르고, x_s는 각 센서에서 측정되는 신호$(N\times 1)$로서 K개의 영이 아닌 성분을 갖는다, $\|x_s\|_0 = K$. n은 White noise로서 $N(0,\sigma_n)$분포를 따른다.

본 논문에서는 모든 x_s에 대해서 다음 식이 만족함을 가정한다.

$$\mathcal{I} := \mathrm{supp}(\mathbf{x}_s) = \{i \mid \mathbf{x}_{s,i} \neq 0\} \tag{2}$$

$\mathrm{supp}(x_s)$는 x_s벡터의 성분들 중에서 0이 아닌 원소들의 인덱스가 모인 집합이다.

B. Joint Typicality

Joint Typicality를 설명하기 앞서 다음과 같은 기호를 정의한다. $\mathfrak{J}$ 집합의 최대 크기는 K이고 $\mathfrak{J}$와 I의 교집합의 크기는 0부터 $K-1$까지 정의한다. $F_{s,I}$ 행렬은 s번째 센서의 측정 행렬이고, F_s의 열벡터 중에서 집합 I의 원소들에 대응하는 열벡터들의 sub-행렬이다. 마찬가지로 $F_{s,\mathfrak{J}}$ 행렬은 F_s의 열벡터 중에서 집합 $\mathfrak{J}$의 원소들에 대응하는 열벡터들의 sub-행렬이다.

Definition: 모든 센서에 대해서 $F_{s,\mathfrak{J}}$의 모든 열벡터들은 선형 독립이고, 모든 노이즈(noise) 또한 독립(independent)라 가정한다. 또한

$$\left|\frac{1}{S}\sum_s \frac{1}{M}\left(\left\|\mathbf{Q}_{F_{s,\mathcal{J}}}\mathbf{r}_s\right\|^2 - (M-K)\sigma_n^2\right)\right| < \delta \tag{3}$$

이면 각 센서들이 획득한 선형 압축된 신호들과 집합 $\mathfrak{J}$는 δ-jotinly typical이라 한다.

Lemma a: $F_{s,I}$의 모든 열벡터들이 선형 독립이면 임의의 양수δ에 대해서 다음과 같이 표현된다.

$$\Pr\left(\left|\frac{1}{S}\sum_s \frac{1}{M}\left(\left\|\mathbf{Q}_{F_{s,\mathcal{I}}}\mathbf{r}_s\right\|^2 - (M-K)\sigma_n^2\right)\right| > \delta\right) \le 2\exp\left(-\frac{S(M\delta')^2}{2(M-K)+M\delta'}\right) \tag{4}$$

여기서, $\delta' = \dfrac{\delta}{\|\sigma_n\|^2}$를 나타낸다.

Lemma b: 모든 센서에 대해서 $F_{s,\mathfrak{J}}$의 모든 열벡터들이 선형독립이라면 각 센서들이 취득한 선형 압축신호들과 $\mathfrak{J}$는 특정 확률로 δ-jointly typical이라 하고 다음과 같이 표현된다.

$$\Pr\left(\left|\frac{1}{S}\sum_s \frac{1}{M}\left(\left\|\mathbf{Q}_{\mathbf{A}_{s,\mathcal{J}}}\mathbf{r}_s\right\|^2 - (M-K)\sigma_n^2\right)\right| < \delta\right) \le \exp\left(-\frac{S\left((M-K)(1-\sigma_n^2)-M\delta\right)^2}{2(M-K)}\right) \tag{5}$$

*Lemma a*와 *b*에 대한 증명은 [3],[4]에 제시되었으며, [3]는 단일 센서에 대한 확률을 표현한 것이고 [4]는 다중 센서에 대한 확률을 표현한 것이다.

C. Error Metric

Jointly typical decoder에서 각 센서로부터 받은 선형 압축신호 r_s를 이용하여 joint 복구된 센서당 복구 신호를 $\hat{x}_s$로 정의한다. 본 논문에서는 복구의 여부를 보이기 위해 다음과 같은 Proposed Error Metric (PEM)을 정의한다.

$$\mathbb{I}\left\{\sum_{s=1}^{S}\frac{|\{i \mid \hat{\mathbf{x}}_{s,i}\neq 0\}\bigcap \mathcal{I}|}{|\mathcal{I}|} > S(1-\alpha)\right\} \tag{6}$$

여기서 $\alpha\in(0,1)$로 정의되고, $\mathbb{I}$는 indicator 함수를 나타낸다. 식 (6)이 뜻하는 바는 모든 신호들이 올바르게 복구가 되었을 때는 0으로 그 반대의 경우는 1이다.

D. Theorem

임의의 양수 δ와 임의의 Gaussian 측정행렬인 F_s에 대해서 충분히 많은 센서의 개수와 선형 측정된 신호의 수가 적어도 $K+1$ 보다 크다면 각 센서당 취득한 선형 압축신호들은 joint 복구시 복구 성공확률이 1로 수렴한다. 이 Theorem의 증명은 [4]에 제시되어 있다.

III. Simulation 결과

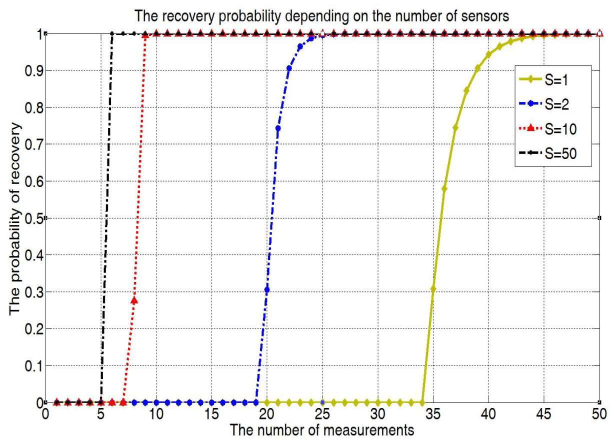

그림 1 N=50, K=5, α=0.01, $\|\sigma_n\|^2$=0.001, δ=0.001

그림 1은 시뮬레이션을 통한 이론적인 결과를 보여준다. 그림1은 센서의 수가 증가함에 따라 적은 선형 압축신호만으로 1의 복구 확률로 빠르게 수렴함을 보여준다. 또한 다중 센서 시스템(MSS)에서 복원을 위해 필요한 샘플수의 한계점은 $K+1$까지 줄어들 수 있음을 보였다

Ⅳ. 결론 및 연구 방향

다중 센서 시스템(MSS)에서 독립적인 압축센싱과 joint 복원 패러다임을 통해 측정되는 신호들의 압축 가능함과 높은 상관도를 최대한 활용할 수 있음을 이론적으로 분석하였다. 추후의 연구 방향으로써는 본 연구에서 확인한 압축 한계에 근접하는 실용적인 복구 알고리즘을 제안하고자 한다. 또한 Slepian-Wolf Theorem 과의 연관성을 규명하고자 한다.

참고문헌

[1] D. Donoho, “Compressive sensing,” *IEEE Trans. Inform. Theory,* Vol.52, pp.1289-1306, 2006

[2] E. Candes, J. Romberg and T. Tao "Robust Uncertainty Principles: Exact Signal Reconstruction from Highly Incomplete Frequency Information," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol.52, no.2, pp.489-509, Feb.2006

[3] M. Akçakaya and V. Tarokh, “Shannon-Theoretic Limits on Noisy Compressive Sampling”, *IEEE Trans. Inform. Theory*, Vol. 56, Np. 1, Jan. 2010

[4] S. J. Park, J. H. Lee, Y. H. Shin and H. N. Lee, "Per-Sensor Measurements required for Noisy Distributed Compressive Sensor System," Submitted to Signal Processing.