

# 검출-추정 구조 기반의 희소 신호 복구

강재욱, 이흥노, 김기선  
 광주과학기술원 정보통신공학과  
 {jwkkang,heungno,kskim}@gist.ac.kr

**Abstract:** 본 논문에서는 검출-추정 구조 기반의 희소 신호 복구에 대해서 연구한다. 컴프레시브 센싱 복구 문제를 MAP 문제로 정의 했을 때 그 문제는 검출-추정 구조를 가지는 희소 신호 복구 문제로 근사화 될 수 있다. 제안하는 알고리즘 (CS-BSD)에서는 검출 단계에서 신뢰 확산 과 베이지안 가설 테스트를 이용 희소 신호의 서포트를 검출하고 추정 단계에서 검출된 정보를 이용하여 신호 값을 찾기 위한 MMSE 추정을 수행한다. 시뮬레이션 결과는 제안하는 알고리즘이 신뢰 확산 기반 추정 신호 복구 (CS-BP) 보다 잡음에 강인하고 보다 작은 수의 측정들로 신호를 복구 할 수 있음을 보여준다.

**Keywords:** 컴프레시브 센싱, 희소 신호 복구, 신호 추정

## I. 서론

컴프레시브 센싱 (Compressive Sensing, CS)이 희소 (sparse) 신호  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^N$ 의 정보율을 줄일 수 있는 새로운 신호 처리 기법으로 각광받고 있다 [1],[2]. 희소 신호란 적절한 기저변환  $\Psi \in \mathbf{R}^{N \times M}$ 를 통해서 신호의 에너지가 작은 수의 샘플들로 응축될 수 있는 신호를 말한다, *i.e.*,  $\mathbf{x} = \Psi \mathbf{f}$ . 여기서  $\mathbf{f} \in \mathbf{R}^M$ 는  $\mathbf{x}$ 의 희소 표현 (Sparse Representation)으로써 작은 수의 영이 아닌 원소로 이루어진 신호이다. CS의 핵심 주장은 그런 희소 신호  $\mathbf{x}$ 는  $M (< N)$ 의 길이를 가지는 측정신호  $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^M$ 로 정보 손실 없이 압축 될 수 있으며 적절한 복구 알고리즘을 통해 높은 확률로  $\mathbf{y}$ 로부터  $\mathbf{f}$ 를 복구 할 수 있다는 것이다. 흥미롭게도,  $\mathbf{x}$ 로부터  $\mathbf{y}$ 로의 신호의 압축은 센싱 행렬  $\Phi \in \mathbf{R}^{M \times N}$ 을 통한 불규칙 사영으로 묘사 된다. 따라서

$$\mathbf{y} = \Phi \Psi \mathbf{f} = \Phi \mathbf{x} \quad (1)$$

이다. 만약 센싱 행렬  $\Phi$ 이 잘 설계된다면 신호의 정보를 측정신호에 고루 잘 분포 시킬 수 있으며 그러한 사실은 신호의 복구 확률을 높인다[3]. 본 논문에서는  $\Psi = \mathbf{I}_N$ 을 가정하여  $\mathbf{x}$  자체가 희소 표현  $\mathbf{f}$ 인 경우를 고려한다 *i.e.*  $\mathbf{x} = \mathbf{f}$ .

일반적으로  $\Phi$ 에 의해서 생성된 측정 신호는 복호기에서 전자기기들의 양자화와 열 효과로 기인하는 잡

음에 영향 받게 된다. 여기서 그러한 효과로 기인하는 잡음을  $\mathbf{n}_y \in \mathbf{R}^M$ 로 표시되는 AWGN,  $\mathcal{N}(0, \sigma_{n_y}^2)$ 으로 묘사한다. 따라서 복호기의 입력이 되는 잡음 섞인 신호는 다음과 간단하게 표현된다.

$$\mathbf{z} = \mathbf{y} + \mathbf{n}_y = \Phi \mathbf{x} + \mathbf{n}_y \quad (2)$$

그럼 복호기의 목표는  $\mathbf{z} \in \mathbf{R}^M$ 로부터 목적 신호  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^N$ 를 추정하는 문제가 되고  $M < N$ 이기 때문에 결과적으로 하나의 underdetermined 시스템의 해를 찾는 문제가 된다. 본래, 희소 신호 복구 문제는  $L_0$ -norm 기반의 최적화 문제 ( $P_{L_0}$ )로 정의 되고 이 문제는 센싱 행렬  $\Phi$ 이 어떤 조건을 만족할 경우  $L_1$ -norm 기반의 최적화 문제로 완화 될 수 있음이 알려져 있다 [1].

$$(P_{L_1}): \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x}\|_1 \quad s.t. \mathbf{y} = \Phi \mathbf{x} \quad (3)$$

이러한 최적화에 기반하는 신호 복구 방법은 희소성 (sparsity)으로 정의 되는 신호의 영이 아닌 원소의 개수  $K$ 를 사전 정보로 이용하여 underdetermined 시스템의 유일한  $K$ -희소 한 해를 찾아낸다.

또 하나의 접근으로써 희소 신호 복구 문제를 최대 사후 추정 (MAP) 문제로 정의 할 수 있다. [4],[5] 이러한 통계에 근거하는 접근은 잡음의 통계를 신호 복구에 이용함으로써 잡음에 대해 강인한 신호 복구 기법이 될 수 있다. 만약  $\mathbf{x}$ 의 원소가 *i.i.d.*라는 가정하에 복호기는 아래와 같이 신호의 각 원소값을 독립적으로 복구 할 수 있다.

$$(P_{MAP}): \max_{\mathbf{x}} p\{x_i = \tau | \mathbf{y}\} \quad s.t. \Phi \mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (4)$$

이러한 설정에서는 희소성 대신에 신호의 한 원소가 영이 아닌 값을 가질 확률로 정의 되는 희소율  $q$  (sparsity rate)을 사용한다. 그리고 희소율 가지고 모델링되는 신호의 확률 분포를 사전 정보로 이용하여 시스템의 유일한 희소 신호를 복구 한다.

본 논문에서는 ( $P_{MAP}$ ) 문제를 풀기 위한 하나의 접근으로써 검출-추정 구조 기반의 희소 신호 복구 알고리즘 (CS-BSD)을 제안한다. CS-BSD의 검출 단계에서는 신뢰 확산 (Belief Propagation, BP)와 베이지안 가설 테스트 (Bayesian hypothesis test,

BHT)를 사용하여 신호의 서포트를 검출한다. 그리고 추정 단계에서는 검출된 서포트 정보를 근거로 신호의 복구 문제를 하나의 overdetermined 시스템으로 축소시키고 MMSE 방법을 통해서 그 시스템의 해를 구한다.

[4]에서 또한 ( $P_{MAP}$ ) 설정을 위한 BP 기반의 저 복잡도  $O(N_{iter} \log N)$  희소 신호 복구 알고리즘 (CS-BP) 제안하였다. 여기서  $N_{iter}$  은 BP 의 반복 횟수이다. 하지만 CS-BP 의 성능은 이산 신호처리를 위한 신호값의 PDF 의 샘플링 간격에 크게 좌우 될 뿐만 아니라 좋은 신호 복구를 위해서는 큰  $N_{iter}$  을 요구하여 계산량이 많아진다. CS-BSD 는 CS-BP 보다 조금 더 큰 복잡도  $O(N_{iter} \log N + NqM)$  를 가지고 PDF 의 샘플링 간격에 의한 성능 열화를 제거하고 잡음에 더욱 강인한 신호 복구를 수행한다. 또한 CS-BSD 는 이진 센싱 행렬  $\Phi = \{0,1\}^{M \times N}$  로 압축된 측정 신호를 대상으로 한다. 이진 행렬을 통한 신호의 압축은 측정 신호  $\mathbf{y}$  가 단순히 불규칙하게 선택된  $\mathbf{x}$  의 원소의 합으로 나타날 수 있기 때문에 매우 빠르게 수행된다는 장점을 가진다.

### II. 신호 모델

본 논문에서는 목적 신호를 통계적 신호 모델을 가지고 묘사한다. 즉 신호의  $i$  번째 원소는 희소율  $q$  의 확률로 서포트 집합,  $\text{supp}$ , 에 속한다. 즉

$$\begin{aligned} q &:= \Pr\{i \in \text{supp}\} = \Pr\{s_i = 1\}, \\ 1-q &= \Pr\{i \notin \text{supp}\} = \Pr\{s_i = 0\}, \text{ for } i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (5)$$

이다. 여기서  $s_i$  는  $\mathbf{s} \in \{0,1\}^N$  로 표시되는 상태 벡터의 한 원소로 신호의  $i$  번째 원소의 서포트에의 귀속 여부를 나타낸다. 그러면 신호의 하나의 원소 값의 PDF 는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_x &:= p\{x_i = \tau\} \\ &= p\{x_i = \tau | s_i = 1\}q + p\{x_i = \tau | s_i = 0\}(1-q) \quad (6) \\ &= \mathcal{N}(0, \sigma_x^2)q + \delta(\tau)(1-q) \end{aligned}$$

여기서  $\delta(\tau)$  은 델타 함수로써  $\delta(\tau)=1$  if  $\tau=1$ , otherwise,  $\delta(\tau)=0$  이다. 그리고 모든  $\mathbf{x}$  의 원소는 서로 *i.i.d.*하다는 가정을 가지고  $\mathbf{p}_x$  에서 인덱스  $i$  를 제거한다. 또한  $\mathbf{p}_x$  는 BP 에서 사전 분포로써의 역할을 맡으며 추정되는 신호가 희소 특성을 가지도록 유도한다.

### III. 검출-추정 구조

본 장에서는 ( $P_{MAP}$ ) 문제로부터 신호 복구를 위한 검출-추정 구조를 유도한다.

**정리 1 (검출-추정 구조):** ( $P_{MAP}$ ) 문제는 다음으로 주어지는 검출-추정 구조에 의해서 최적으로 희소 신호

를 복구한다.

$$\arg \max_{x_i} p\{x_i = \tau | \mathbf{y}\} = \begin{cases} 0, & \frac{\Pr\{s_i = 0 | \mathbf{y}\}}{\Pr\{s_i = 1 | \mathbf{y}\}} > 1 \\ \arg \max_{x_i} p\{x_i = \tau | \mathbf{y}\}, & \zeta < \frac{\Pr\{s_i = 0 | \mathbf{y}\}}{\Pr\{s_i = 1 | \mathbf{y}\}} \leq 1 \\ \arg \max_{x_i} p\{x_i = \tau | \mathbf{y}, s_i = 1\}, & \frac{\Pr\{s_i = 0 | \mathbf{y}\}}{\Pr\{s_i = 1 | \mathbf{y}\}} \leq \zeta \end{cases} \quad (7)$$

**증명:** ( $P_{MAP}$ )로부터 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned} (P_{MAP}): \max_{x_i} p\{x_i = \tau | \mathbf{y}\} &= \max_{x_i} \left[ \sum_{s_i \in \{0,1\}} p\{x_i = \tau, s_i | \mathbf{y}\} \right] \\ &= \max_{x_i} [p\{x_i = \tau | \mathbf{y}, s_i = 1\} \Pr\{s_i = 1 | \mathbf{y}\} + p\{x_i = \tau | \mathbf{y}, s_i = 0\} \Pr\{s_i = 0 | \mathbf{y}\}] \\ &= \max_{x_i} [p\{x_i = \tau | \mathbf{y}, s_i = 1\} \Pr\{s_i = 1 | \mathbf{y}\} + \delta(\tau) \Pr\{s_i = 0 | \mathbf{y}\}] \end{aligned} \quad (8)$$

식 (8)에서  $p\{x_i = \tau | \mathbf{y}, s_i = 0\} = \delta(\tau)$  이다. 왜냐하면 한번  $s_i = 0$  로 결정되면 해당 값은 반드시 영 값을 가져야 하기 때문이다.  $\Pr\{s_i = 0 | \mathbf{y}\} > \Pr\{s_i = 1 | \mathbf{y}\}$  인 경우,  $p\{x_i = \tau | \mathbf{y}, s_i = 1\} \leq \delta(0) = 1$  은 모든  $\tau$  에 대해서 항상 참이기 때문에 위의 식에서 두 번째 항이 지배적이게 되고 따라서 ( $P_{MAP}$ ) 은 항상 추정 값을 영으로 출력한다. 반면에 아래의 조건이 만족 된다면 ( $P_{MAP}$ ) 에서 두 번째 항을 무시되고 첫 번째 항이 주요하게 된다.

$$\begin{aligned} \delta(0) \Pr\{s_i = 0 | \mathbf{y}\} + p\{x_i = 0 | \mathbf{y}, s_i = 1\} \Pr\{s_i = 1 | \mathbf{y}\} &\leq \\ \max_{x_i} [p\{x_i = \tau | \mathbf{y}, s_i = 1\} \Pr\{s_i = 1 | \mathbf{y}\}] & \\ \Leftrightarrow \frac{\Pr\{s_i = 0 | \mathbf{y}\}}{\Pr\{s_i = 1 | \mathbf{y}\}} &\leq \max_{x_i} [p\{x_i = \tau | \mathbf{y}, s_i = 1\}] - p\{x_i = 0 | \mathbf{y}, s_i = 1\} \\ &:= \zeta \end{aligned} \quad (9)$$

그 외의 경우에는 모든 항을 고려하여 신호값을 추정한다. 따라서 최종적으로 식 (7)의 결과를 얻을 수 있다.

만약  $\zeta \approx 1$  이라면 (7)을 통한 신호 복구는 아래와 같이 근사화 될 수 있다.

$$\arg \max_{x_i} p\{x_i = \tau | \mathbf{y}\} \approx \begin{cases} 0, & \frac{\Pr\{s_i = 0 | \mathbf{y}\}}{\Pr\{s_i = 1 | \mathbf{y}\}} > 1 \\ \arg \max_{x_i} p\{x_i = \tau | \mathbf{y}, s_i = 1\}, & \frac{\Pr\{s_i = 0 | \mathbf{y}\}}{\Pr\{s_i = 1 | \mathbf{y}\}} \leq 1 \end{cases} \quad (10)$$

하지만 실제로  $\zeta$  값을 알 수 없기 때문에 간단한 알고리즘 구현 목적을 위해 본 논문에서는  $\zeta \approx 1$  이라고 가정하고 식 (10)을 사용하는 신호 복구를 제안한다. 정리 1에서부터 유도된 식 (10) 은 신호의 복구 과정이 서포트를 검출하기 위한 가설 검증 단계와 그 정보를

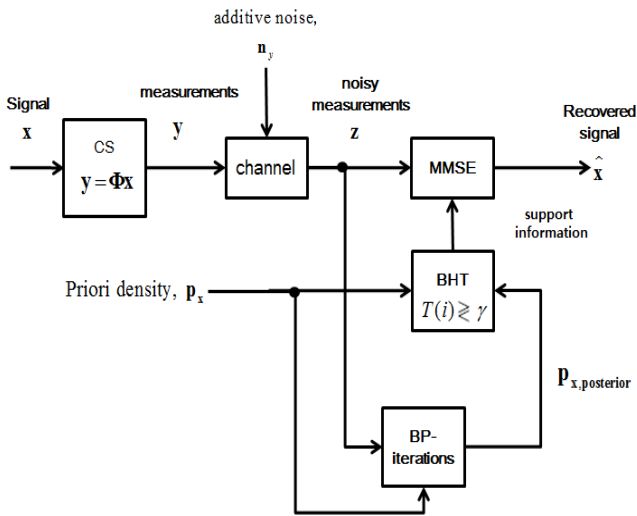


그림 1. CS-BSD 의 시스템 블럭도

으로 신호 값을 추정 단계로 나누어 질 수 있다는 사실에 대한 근거를 제시한다.

#### IV. 알고리즘

##### 1. 서포트 검출

**정의 1 (베이지안 서포트 검출):** 다음으로 주어지는 BHT를 이용하여 신호의  $i$  번째 원소의 서포트 상태를 판단한다.

$$\text{BHT: } \begin{cases} T(i) > \gamma \rightarrow s_i = 0 \\ T(i) \leq \gamma \rightarrow s_i = 1 \end{cases}, \text{ for } \forall i \in V$$

where

$$\begin{aligned} T(i) &:= \log \left( \frac{\Pr\{s_i = 0 | \mathbf{y}\}}{\Pr\{s_i = 1 | \mathbf{y}\}} \right) \\ &= \log \left( \frac{\sum_{\tau} \frac{p\{x_i = \tau | s_i = 0\} p\{x_i = \tau | \mathbf{y}\}}{\mathbf{p}_x}}{\sum_{\tau} \frac{p\{x_i = \tau | s_i = 1\} p\{x_i = \tau | \mathbf{y}\}}{\mathbf{p}_x}} \right) \\ &= -\log \left( \frac{\sum_{\tau} \frac{p\{x_i = \tau | s_i = 1\} p\{x_i = \tau | \mathbf{y}\}}{\mathbf{p}_x}}{\sum_{\tau} \frac{p\{x_i = \tau | s_i = 0\} p\{x_i = \tau | \mathbf{y}\}}{\mathbf{p}_x}} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

여기서 BHT의 임계값은  $\gamma := \log[q/(1-q)]$  로 정의 한다.

베이지안 서포트 검출에 사용되는 사후 분포  $p\{x_i = \tau | \mathbf{y}\}$  는 BP을 통해서 얻는다. BP에서는 확률 정보의 반복적 갱신을 통하여 사전 분포로부터 사후 분포를 구할 수 있다. BP반복 횟수가 증가함에 따라서  $i \in \text{supp}$  인 경우 그림 1의 (1-b), (2-b)과 같이 사전 분포에서 영에 집중되어 있던 확률 질량이 추정값 향하여 이동하여 사후 분포는 영이 아닌 값에서 피크 확률을 가지는 확률 분포로 수렴한다. CS-BSD에서는 사후 확률이 수렴하기 전에 작은 수의 반복횟수 안에 일어나는 확률 질량의 이동을 빠르게 탐지 하여 BHT를 이용하여 해당 원소의 서포트 상태를 확인 한다. 그렇기

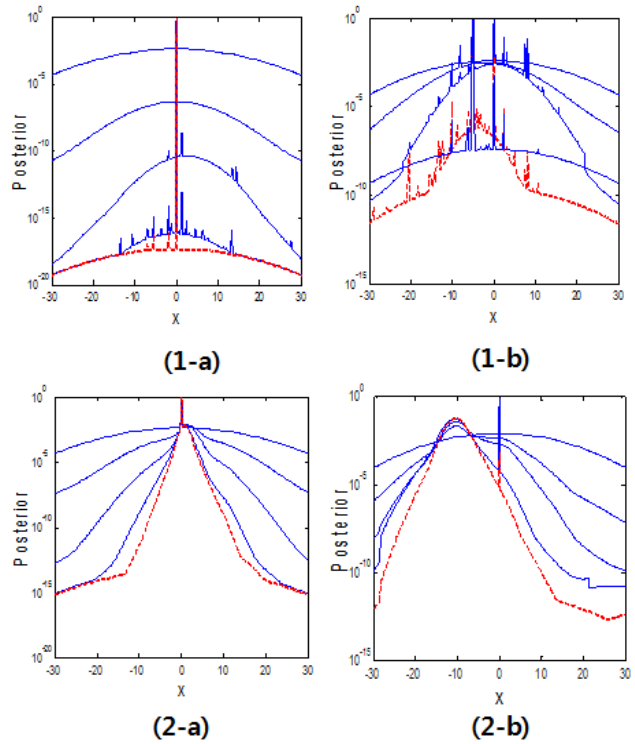


그림 2. BP 반복 통한 사후 분포의 확률 질량 이동, (1-a):  $i \notin \text{supp}$ , 잡음이 없는 경우, (1-b):  $i \in \text{supp}$ , 잡음이 없는 경우, (2-a):  $i \notin \text{supp}$ , 잡음이 섞인 경우, (2-b):  $i \in \text{supp}$ , 잡음이 섞인 경우.

때문에 BP에 소모되는 계산량을 획기적으로 줄 일 수 있다.

##### 2. 신호값의 추정

각 원소의 서포트 상태가 검출 되면 식 (10)에 따라서  $s_i = 0$  인 원소값은 영으로 판단되고  $s_i = 1$  인 경우  $\hat{x}_i = \arg \max_{x_i} p\{x_i = \tau | \mathbf{y}, s_i = 1\}$  을 풀어야 한다.

$\mathbf{x}_{\text{supp}} \sim \{x_i : \forall i, s_i = 1\}$  을 서포트에 속하는 원소값으로만 이루어진 하나의 벡터 라고 하면 잡음  $\mathbf{n}_y$  이 가우시안 분포를 따를 때 MAP과 MMSE 추정은 동등하고 최적의 근사화를 제공한다는 사실이 잘 알려져 있다 [6, p358]. 따라서

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{\text{supp}} &= \arg \max_{\mathbf{x}_{\text{supp}}} p\{\mathbf{x}_{\text{supp}} | \mathbf{y}, \mathbf{s}\} \\ &= (\Phi_{\text{Supp}}^T \Phi_{\text{Supp}})^{-1} \Phi_{\text{Supp}}^T \mathbf{z} \end{aligned} \quad (12)$$

여기서  $\Phi_{\text{Supp}} \in \{0,1\}^{M \times \text{supp}}$  는 서포트에 해당 벡터들로만 구성된  $\Phi$  의 준행렬이다.

측정 신호에 잡음이 더해지는 경우 사후 분포는 잡음의 분산에 따라서 그림 1의 (2-a, b)와 같이 확률 질량이 넓게 퍼지게 된다. 따라서 잡음 효과에 의해 사후 분포 안에 부족한 확률 질량들이 무더져서 BP만 가지

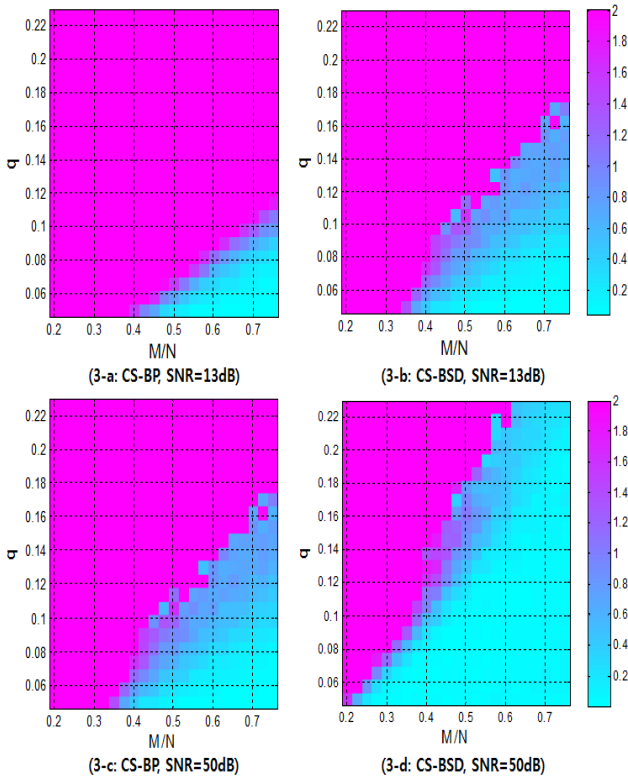


그림 3. 희소율  $q$  과 샘플링율  $M/N$  에 따르는 평균 제곱 오차 (MSE) 신호 복구 성능

고는 정확한 신호값 추정이 힘들어 진다. 그러나 CS-BSD 는 사후 분포 안의 확률 질량의 움직임에 근거하여 서포트를 검출하고 MMSE 을 가지고 가우시안 잡음에 최적의 근사화를 제공하기 때문에 CS-BSD 는 잡음에 강인하게 신호를 복구 할 수 있다 [7].

### V. 시뮬레이션 결과

CS-BP 와 CS-BSD 의 희소율과 샘플링율에 따르는 평균 제곱 오차 (MSE) 신호 복구 성능을 시뮬레이션을 통해서 알아본다. 같은 BP 반복 횟수를 사용하기 때문에 계산복잡도는 CS-BSD 가 MMSE 를 따로 사용하는 만큼 더 크다. 그림 3 은 잡음이 심한 상황에서나 잡음이 거의 없는 상황에서나 CS-BSD 가 CS-BP 보다 더욱 넓은 범위에서 신호 복구를 가능하게 하고 더 작은 MSE 를 가지는 것을 보여준다. 그 이유는 CS-BSD 는 신호값 추정에 MMSE 를 사용하기 때문에 신호값의 PDF 를 위한 샘플링 간격에 복구 성능이 제약 받지 않고 또한 BHT 를 통해서 잡음이 심한 상황에서도 탁월하게 서포트 상태를 추정하기 때문이다.

### VI. 토의

검출-추정 구조에 기반한 희소 신호 복구 알고리즘 CS-BSD 에 대해서 알아보았다. CS-BSD 의 유용성을 더 검증하기 위해서는 서포트를 검출하기 위해서 요구되는 BP 반복의 횟수를 분석해야 한다.

그러므로 써 CS-BSD 의 실질적인 복잡도를 다른 CS 복구 알고리즘들과 비교 분석할 수 있다. 또한 CS-BSD 이 복구 실패하는 경우에 대한 분석도 향후 과제로 남아있다.

### VII. 감사의 글

이 논문은 2011 년도 정부 (교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구임 (중견연구자-도약연구사업, NO. 2011-0016496, 중견연구자-핵심연구사업, NO. 2010-0026407)

### 참고문헌

[1] D. Donoho, "Compressed sensing," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 52, no. 4, pp. 1289-1306, Apr. 2006.

[2] E. Candes, J. Romberg, and T. Tao, "Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 52, no. 2, pp. 489-509, Feb. 2006.

[3] Candes E. J. and Tao T., "Decoding by linear programming," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 51, no. 12, pp. 4203-4215. Dec. 2005.

[4] D. Baron, S. Sarvotham, and R. Baraniuk, "Bayesian Compressive Sensing via Belief Propagation," *IEEE Trans. Signal Process.* vol. 58, no. 1, pp. 269-280, Jan. 2010.

[5] Shihao Ji, Ya, Xue, and Lawrence Carin, "Bayesian compressive sensing," *IEEE Trans. Signal process.* vol. 56, no. 6, pp. 2346-2356, Jun. 2008.

[6] S. M. Kay, *Fundamentals of Statistical Signal Processing Volume I: Estimation theory*, Prentice Hall PTR, 1993.

[7] J.W. Kang, Heung-No Lee and Kiseon Kim "Message Passing Aided Least Square Recovery for Compressive Sensing," *SPARS' 11*, Edinburgh, Scotland, UK, Apr. 2011.