Derivation of Black-Scholes equation 블랙-숄즈 방정식 유도과정

Hoon Song

Independent Study Advised by Prof. Heung-No Lee, GIST

1. Introduction : Option, Option pricing and Black-Scholes equation

옵션은 기초자산[1]으로부터 나온 파생상품으로 콜옵션(Call Option)과 풋옵션(Put Option)이 있다. 콜옵션은 미리 정해진 가격으로 살 수 있는 권리를 말하고 풋옵션은 특정 가격으로 팔 수 있는 권리를 말한다. 가장 간단한 유럽형 콜옵션의 예를 들어보자. 유럽형 콜옵션은 특정날짜에 미리 정해진 특정가격에 살 수 있는 옵션이다. 현재 기초자산의 가격이 $100이라고 하였을 때, 한 투자자가 6개월 뒤 기초자산을 $120에 살 수 있는 유럽형 콜옵션을 $\$C$ 에 샀다고 하자. 만약 6개월 뒤 기초자산의 가격이 $150이 되었다면, 옵션을 행사하여 $120에 사고, 그 즉시 팔아 $\$30-C$ 의 차익을 얻을 수 있다. 반대로 만기일의 기초자산의 가격이 $90가 되었다면 옵션을 행사하지 않고 $\$C$ 만 잃으면 된다. 위의 예에서 옵션은 기초자산의 가격이 $120밑으로 기초자산의 가격이 내려갔을 때 위험성을 없앴고 $120이상으로 기초자산의 가격이 올라갔을 때 차익은 남겼다. 즉, 옵션구매자는 옵션을 구매함으로 위험성을 없애고 이익만을 남길 수 있는 Position을 취하였다. 이렇듯 옵션은 투자자로 하여금 위험을 Hedging하는 목적으로 사용될 수 있는 파생상품이다. 앞에서 옵션 구매자의 입장에서 논의했지만 이번에는 같은 옵션을 판매한 옵션판매자의 이야기를 해보자. 옵션 판매자의 경우 만기일의 기초자산의 가격이 $120보다 낮으면 옵션구매자가 옵션을 행사하지 않아 이익이 $\$C$ 이고, $120보다 높은 $150이면 옵션구매자가 옵션을 행사하여 $\$(30-C)$ 의 손해를 보게 된다. 옵션가격이 $20이라 생각했을 때의 옵션 구매자와 판매자의 Payoff 그래프는 그림1과 같다.

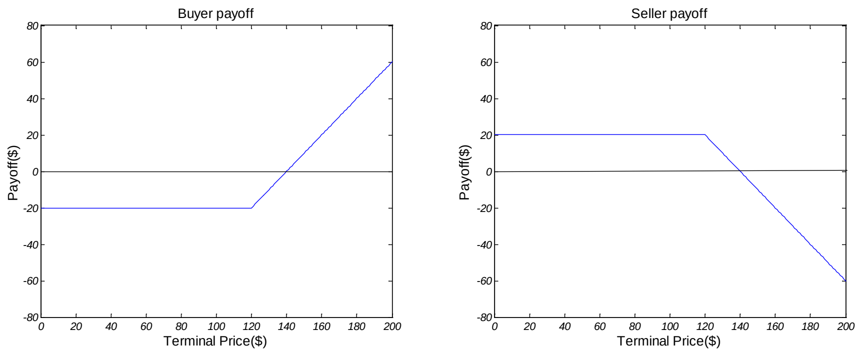

그림 1

[1] 기초자산은 대표적으로 주식, 채권, 통화, 주가지수 등. 경제적 현상 속에서 합리적인 방법에 의하여 가격이 평가되는 자산을 말한다.

옵션판매자는 옵션의 가격이 낮아져야 많은 이익을 취할 수 있고, 옵션 구매자는 옵션의 가격이 높아져야 많은 이익을 취할 수 있다. 위의 예에서 알 수 있듯이, 옵션 판매자와 구매자 모두가 동의할 수 있는 옵션에 대한 가격이 결정되어야 한다는 것이다. 그렇지 않으면 한 쪽에게 손해를 가져다 줄 가능성이 커져 공정하지 않은 가격이 된다.

옵션가격결정에 대한 문제는 1973년도에 Black과 Scholes에 의해 개발된 Black-Scholes equation에 의해 해결되었다. 옵션에 대한 가격결정을 한 블랙 숄즈 모델은 옵션상품의 가격결정에 많은 발전을 이끌어 왔다. 우리는 앞으로 Black Scholes 방정식이 어떻게 유도 될 수 있는지를 이토과정에 기초한 기초자산 모델을 통해 살펴볼 것이다.

2. Wiener process, Generalized Wiener process and Ito Process

2-1.Wiener process and Generalized Wiener process

앞으로 유도하게 될 블랙-숄즈 방정식은 기초자산이 이토과정을 따른다는 가정하에 만들어진 방정식이다. 이토과정을 이해를 돕기 위해 간단한 확률과정인 위너프로세스에 대해 소개한다. 위너프로세스를 따르는 확률변수 z 는 다음을 만족한다.

1. Δt 후에 변하는 z 의 양, $\Delta z = N(0,1^2)\sqrt{\Delta t}$ 이다.[2] 여기서 $N(0,1^2)$ 은 평균이 0이고, 분산이 1인 정규분포를 말한다.

2. 겹치지 않은 어떤 두 작은 시간구간 Δt 를 택하더라도, Δz 는 서로 독립적이다. 즉, 마르코프 과정이다.

3. 조금 더 확장해, '일반화된 위너프로세스'를 따르는 확률변수 x 는 다음과 같이 표현된다.

$$dx = adt + bdz \tag{1}$$

where $dz = \lim_{\Delta x \to 0} N(0,1^2)\sqrt{dt}$, a and b are constant.

위 식에서 x 의 변화량은 adt 와 bdz 의 합이다. $dx = adt$ 를 풀어보면 우리가 익히 알고 있는 일차방정식이고, dz 는 위너프로세스를 따르는 변수이다. 따라서 변수 x 는 dt 후에, 평균이 adt 이고 분산이 b^2 인 정규분포를 따르는 확률변수이다. 즉, $dx = N(adt, b^2dt)$ 가 된다.

위너프로세스와 일반화된 위너프로세스의 흐름을 비교하여 보자.

---

[2] Central-Limit Theorem을 증명하는데 바탕이 되는 Levy's Theorem 으로 증명 가능하다. (자세한 내용은 reference[5]참고)

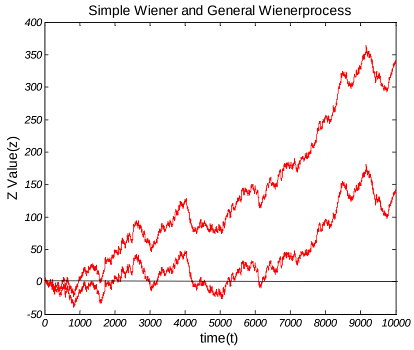

그림 2

그림2에서도 알 수 있듯이, 확률변수 x 의 흐름은 일차함수에 위너프로세스를 더한 형태이다. 전체적인 경향은 일차함수의 기울기를 결정하는 요소인 a (Drift rate)가 결정하고, 변동성에 대한 부분은 상수 b (Variance rate)가 결정하는 것이다.

2-2.Ito process and Ito's lemma

이토과정은 일반화된 위너프로세스에서의 Drift rate(a)과 Variance rate(b)이 상수가 아닌 x 와 t 에 관한 함수인 확률과정이다. 우리가 앞으로 모델링할 기초자산의 흐름 또한 이토과정을 따르는데 이토과정을 풀이하는 방법은 이토적분이라는 복잡한 수학체계를 따라야 한다. 하지만 우리는 복잡한 이토적분 없이 Ito's lemma[3]라는 유용한 정리를 이용해 그 과정을 우회하여 풀이 할 것이다.

Ito's lemma: 함수 G 가 확률변수 x 와 시간변수 t 에 대한 함수이고, 확률변수 x 가 Ito Process $dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz$ 를 따르면, G 의 변화량은 $dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial x} bdz.$ 로 표현된다.

3. Underlying asset modeling

u 의 expected return을 갖는 기초자산을 가정해 보자. 다른 변수가 없을 때 기초자산의 가격은 다음과 같이 표현 된다.[4]

$$S(t_{i+1}) = S(t_i)e^{udt} \qquad (2)$$

[3] Appendix.1:Ito's lemma 증명 참조.

[4] Appendix.2: Continuously compounded interest rate 참조.

이 식의 지수함수 부분을 테일러 전개 하여 고차항을 무시한다면, 기초자산의 가격은 $S(t_{i+1}) = S(t_i)(1+udt)$ 로 표현 할 수 있다. 따라서 dt 동안의 기초자산의 가격 변화는

$$S(t_{i+1}) - S(t_i) = dS = S(t_i)udt \qquad (3)$$

가 된다. 이 방정식을 풀어보면 지수함수 그래프가 나온다. 하지만 실제 주가의 흐름은 무위험자산의 흐름과 같지 않다. 자산시장에서 가격결정은 투자자들의 수요와 공급에 의해서 결정이 되는데, 투자자들은 자산에 대한 서로 다른 견해를 가지고 자산을 사기도 하고 팔기도 한다. 실제로 기초자산의 그래프를 보면 바로 다음 날의 가격조차도 예측 불가능 해 보인다. 즉, 실제 기초자산의 그래프에는 '예측 불가능한 변동성'이 존재한다. 이 변동성이 기초자산의 가격에 비례한다고 가정하여 수식에 넣어 보면 다음과 같다.

$$dS = S(t)udt + \sigma S(t)dz \qquad (4)$$

여기서 σ 는 변동성이고, z 는 위너프로세스를 따르는 변수이다. 여기서 변동성의 확률변수를 정규분포로 택한 것은 중심극한정리(Central-Limit Theorem) 덕분이다. 기초자산의 흐름을 연속적으로 나눌 것임으로 각각의 미시수준의 시간구간에서는 정규분포의 변동성을 갖는다고 생각한 것이다. 위 식(4)을 보면 drift rate 과 variance rate이 상수가 아니기 때문에 S가 이토과정을 따르는 것을 확인 할 수 있다.

이토과정을 기반으로 한 기초자산 모델을 분석적으로 기초자산 모델을 분석하기에 앞서 과연 이 미분방정식이 어떤 의미를 갖는지 Discrete-time수준에서 생각해보자. Discrete time 에서 (4)를 써보면,

$$\Delta S = S(t)u\Delta t + \sigma S(t)\Delta z$$

$$or, \frac{\Delta S}{S} = u\Delta t + \sigma \Delta z = u\Delta t + \sigma N(0,1^2)\sqrt{\Delta t} \qquad (5)$$

으로 표현된다. 예를 들어 변동성이 20%/년이고, 기대수익률이 10%/년인 기초자산이 있다고 하면 일년에 비해 아주 작은 시간인 한 주간 기초자산의 변화량은 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{\Delta S}{S} = 0.10 \times 0.0192 + 0.20\varepsilon\sqrt{0.0192} = 0.00192 + 0.02771\varepsilon$$

예를 들어 기초자산의 가격이 현재 \$100라고 가정하면 $\Delta S = 0.192 + 2.771\varepsilon$ 이기 때문에 일주일 뒤의 가격은 $S = 100 + 0.192 + 2.771\varepsilon$ 로 표현된다. ε 가 정규분포이기 때문에 평균값은 0.192이지만, 실제로 우리가 갖는 값은 변동성의 영향이 큰 것을 알 수 있다. 그림3은 MATLAB으로 시뮬레이션한 기초자산 흐름이다. 파란색 그래프의 변동성 σ 이 더 큰 값이다.

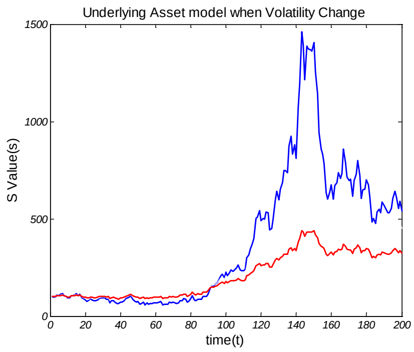

그림 3

이제 $dS = uSdt + \sigma Sdz$ 를 따르는 주식가격을 Ito's lemma를 이용하여 분석해 볼 것이다. 특별하게도 Geometric Brownian Motion이라 이름 붙여진 이 과정은 Ito's lemma를 사용하면 치환한 변수가 일반화된 위너프로세스를 따르게 된다. Ito's lemma를 이용하기 위해 S 에 로그를 취한 $\ln S$ 를 G 라 하자. ($G = \ln S$) G 는 S 의 함수이기 때문에 Ito's lemma를 이용할 수 있다. Ito's lemma에 의해 G 의 변화량은

$$dG = (\frac{\partial G}{\partial S}\mu S + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}\sigma^2 S^2)dt + \frac{\partial G}{\partial S}\sigma Sdz \qquad (6)$$

이고, $G = \ln S$ 임으로

$$\frac{\partial G}{\partial S} = \frac{1}{S}, \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}, \frac{\partial G}{\partial t} = 0 \qquad (7)$$

이다. (7)을 (6)에 대입하면

$$dG = (\mu - \frac{\sigma^2}{2})dt + \sigma dz \qquad (8)$$

이다. μ 와 σ 를 상수로 두었기 때문에 확률변수 $G = \ln S$ 가 일반화된 위너프로세스를 따르는 것을 알 수 있다. 즉, G 는 Drift rate이 $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$, Variance rate이 σ^2 인 일반화된 위너프로세스이다. 각각의 과정이 독립적이기 때문에, $\ln S$ 가 시간이 0에서 T로 갈 때 변화량을 생각해보면

$$\ln S_T \sim N[\ln S_0 + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})T, \sigma^2 T] \qquad (9)$$

이다. 이토과정을 따르는 기초자산의 로그를 취한 함수가 이토과정보다 더 강력한 조건인 위너프로세스를 따르는 것은 이례적인 일이다. 이것이 가능했던 이유는 식 (6), (7)에서 보듯이 로그의 미분 성질에 의해 S 와 S^2 이 소거되어 없어졌기 때문이다.

4. Ito's lemma and Black-Scholes Equation

본격적으로 Black-Scholes equation을 구하기 위해, 옵션에 대한 가격함수 f 를 도입하자. f 는 기초자산에 기초를 하고 있음으로 반드시 기초자산에 대한 변수 S 를 독립변수로 갖는다. 또한, 옵션의 구매시점에 따라 가격이 달라짐으로 시간변수 t 또한 독립변수로 갖는다는 것을 예상할 수 있다. 즉, 옵션에 대한 가격함수는 $f(S,t)$ 이고, Ito's lemma를 이용해 Δf 에 대한 표현 식을 얻으면,

$$\Delta f = (\frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2)\Delta t + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S \Delta z \qquad (10)$$

이다. 또, 우리는 기초자산의 가격S가 (4)를 따름을 알고 있다 여기서 두 가지 포트폴리오를 구성해보자.

포트폴리오A: 옵션 하나를 팔고, $\frac{\partial f}{\partial S}$ 만큼의 기초자산을 구매

포트폴리오B: 포트폴리오A의 가치에 해당하는 현금을 무위험자산에 맡긴다.

이 두 포트폴리오의 가치는

$$\Pi = -f + \frac{\partial f}{\partial S} S \qquad (11)$$

이다. 여기서 no arbitrageur principle를 이용하여 보자. Δt 라는 짧은 시간 뒤, 만약 포트폴리오A와 포트폴리오B의 가치가 다르다면 어떤 일이 벌어질까? 만약 차익거래자가 있다면 두 가지의 포트폴리오 중 하나를 구성하여 짧은 시간 뒤에 팔아 차익을 남길 것이다. 그렇다면 우리가 설정한 옵션가격함수 f 가 적절하지 않은 것이 된다. 따라서 f 는 짧은 시간 동안 무위험자산과 수익율이 같아야 한다. 즉,

$$\Delta \Pi = r \Pi \Delta t \qquad (12)$$

를 만족하여야 한다. 포트폴리오의 가치변화 $\Delta \Pi$ 는

$$\Delta \Pi = -\Delta f + \frac{\partial f}{\partial S}\Delta S \qquad (13)$$

이다. 위의 두 공식(4), (10)를 (12)에 넣으면

$$\Delta \Pi = (-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2)\Delta t \qquad (14)$$

식(12)에 식(11)과 (14)를 대입하여 정리하면,

$$\frac{\partial f}{\partial t}+rS\frac{\partial f}{\partial S}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 = rf \qquad (15)$$

가 된다. 식(15)가 바로 Black-Scholes equation이다.

Future work

완성된 Black-Scholes equation은 편미분 방정식의 형태로 주어졌다. 이 방정식은 확산방정식으로 여러 이색옵션의 조건들을 대입하여 옵션가격을 결정해 볼 수 있다. 심화과제로는 Black-Scholes 방정식으로 결정된 옵션가격과 Monte-Carlo와 Binomial method를 이용해 구한 가격을 비교하는 것을 할 수 있다. 이 논문의 초기 목적이 심화과제의 내용이었으나 방정식의 해를 구하는 과정이 많은 수학적 지식을 요구하여 실패하였다. 또한 수치적인 방법에서 이론적인 결과물을 얻어내는데 어려움을 겼었다.

Appendix.1 : Ito's lemma

함수 G 가 확률변수 x 와 시간변수 t 에 대한 함수이고, 확률변수 x 가 Ito Process $dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz$ 를 따르면, G 의 변화량은 $dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x}a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2\right)dt + \frac{\partial G}{\partial x}bdz.$ 로 표현된다.

증명과정) Ito's lemma의 설명에 앞서 이변수함수에서의 Taylor expansion에 대해 알아보자. 이변수 함수 $G(x,y)$ 가 모든 점에서 연속이고 미분 가능하다면, 작은 x 와 y 의 변화에 대해

$$\Delta G = \frac{\partial G}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial G}{\partial y}\Delta y + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\Delta x^2 + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y}\Delta x \Delta y + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}\Delta y^2 + \dots$$

이다. Δx 와 Δy 가 극한으로 영으로 수렴한다고 가정하면 위 식은 고차항을 무시하여

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x}dx + \frac{\partial G}{\partial y}dy$$

이라 할 수 있다.

$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz$ 를 이산화 시키면

$$\Delta x = a(x,t)\Delta t + b(x,t)\varepsilon\sqrt{\Delta t}$$

그리고 어떤 함수 G가 x, t 변수를 갖는 함수라면 앞에서와 같이

$$\Delta G = \frac{\partial G}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial G}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\Delta x^2 + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial t}\Delta x \Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}\Delta t^2 + ...$$

로 표현된다.

Δx 와 Δt 가 극한으로 0으로 수렴한다고 하면 고차항들은 무시해도 된다. 하지만 Δx^2 부분은 위의 공식에 의해 $\Delta x^2 = b^2\varepsilon^2\Delta t + O(\Delta t^2)$ 가 된다. Δx^2 을 치환하여 다시 고차항을 무시하면 아래의 식이 된다.

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x}dx + \frac{\partial G}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2 dt$$

여기에 $dx = a(x,t)dx + b(x,t)dz$ 를 대입하면

$$\begin{aligned} dG &= \frac{\partial G}{\partial x}(adx + bdz) + \frac{\partial G}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2 dt \\ &= (\frac{\partial G}{\partial x}a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2)dt + \frac{\partial G}{\partial x}bdz. \end{aligned}$$

Appendix.2 : Countinuously Compounded Interest

복리를 계산하는 방법은 두 가지 방법이 있다. 이산적인 복리계산법과 연속적인 복리계산법이 있다.

이산적인 복리계산법은 정해진 시간이 지나면 그 시간을 기준으로 이자를 곱하는 방법이다. 간단한 예를 들어보자. 만약 자금 $100가 있는데 이산적인 복리로 1년에 20%의 이자를 계산한다고 하자. 그렇다면 10년뒤에 자금 $100는 $(1.2)^{10} \times \$100 \approx \$619$ 가 되어있는다.

연속적인 복리계산법은 1년에 한번 이자를 샘하는 것이 아니라 연속적으로 이자를 샘하는 것이다.

자금 F 가 연이율 r 인 연속복리를 취한다고 하자. T년 뒤에 자금 F 의 가격이 얼마일까?

공식을 유도하기 위해 이자가 곱해지는 구간을 n번으로 나누었다고 가정하자.

T년 후에 금액은 $(1 + rT/n)^n F$ 이다.

연속적인 복리공식을 위해 $n \to \infty$ 를 하면, $\lim_{n \to \infty}(1 + rT/n)^n F = e^{rT}F$ 가 된다.

첫 번째 예와 같은 조건이지만 연속복리를 쓴다고 생각해서 계산해보면, $e^{0.2\times10} \times \$100 = \$738$ 가 된다.

Reference

[1] Fisher Black, ;Myron Scholes."The pricing of Options and Corporate Liagilities, The Journal of Political Economy, Vol.81 ,Issue 3(May-Jun.,1973), pp.637-654.

[2] Desmond J. Higham."Black-Scholes For Scientific Computing Students", Computing in Science and Engineering Vol.6 Issue 6(November 2004). pp 72-79.

[3] John C. Hull. Option, Futures, and Other Derivatives, 8th ed. Prentice Hall, 2011

[4] Desmond J. Higham.An introduction to Financial Option Valuation, Cambridge University Press, 2004.

[5] Salih N.Neftci. An introduction to the Mathematics of Financial Derivatives, 2nd ed. Academic Press, 2000.

[6]이준행. 금융공학 모델링, 에프엔가이드, 2011.

[7]성승제, 금융공학의 수학적 기초, 경문사, 2010.