다중 측정 벡터 모델에 관한 최신 분석 결과 소개

박상준, 최해웅, 이웅비, 김철순, 강주성, *1)이흥노
광주과학기술원 전기전자컴퓨터공학부
e-mail : {sjpark1,haeung,wblee,csk0315,k92429,*heungno}@gist.ac.kr

Recent Analysis Results on Multiple Measurement Vectors Model

*Sangjun Park, Haeung Choi, Woong-Bi Lee, Cheolsun Kim, Jusung Kang, *Heung-No Lee
School of Electrical Engineering and Computer Science
Gwangju Institute of Science and Technology (GIST)

Abstract

In this paper, we introduce recent results on the multiple measurement vectors (MMV) model with different sensing matrices [1] and exploit them to interpret benefits reported in [2], where Benini *et al.* has reported that the size of the data transmitted by each sensor decreases to the sparsity as the number of sensor is sufficiently large.

I. 서론

아날로그 신호를 적은 수의 샘플로 표현하는 것에 대한 연구는 오래 되었다. 대표적인 Nyquist 샘플링 [3] 이론은 신호를 복원하기 위해서는 신호의 최대 주파수 보다 2배에 해당하는 비율로 균등하게 샘플이 이뤄져야 한다고 한다. 또한, 샘플된 신호를 압축하기 위해서는 별도의 신호처리가 필요 하였다. 그런데, 2005년 소개된 압축센싱 (compressed sensing)의 이론 [4]은 희소(sparse) 신호의 특징 – 즉 대부분의 신호의 값들이 0인 신호 – 을 이용하여 Nyquist 샘플링 이론보다 더 적은 수의 샘플을 취득하여도 신호 복원이 가능한 것을 보장한다. 또한, 압축된 신호를 얻기 때문에 압축을 위한 별도의 신호 처리 비용이 필요 없는 장점이 있다.

압축센싱의 모델은 2가지 형태 – 단일 측정 벡터 (single measurement vector, SMV) 와 2)다중 측정 벡터들 (multiple measurement vectors, MMV) – 로 나뉜다. 단일 측정 벡터 모델의 목표는 하나의 측정 벡터로부터 하나의 희소 신호를 복원하는 것이다. 반면, 다중 측정 벡터들 모델의 목표는, 희소 신호들의 상관관계를 이용하여 어려 개의 측정 벡터로부터, 희소 신호들을 한 번에 복원하는 것이다. 이 때, 희소 신호들의 상관관계를 이용하기 때문에, 각 희소 신호를 샘플링 할 때, 필요한 샘플의 숫자를 줄일 수 있는 장점을 가지고 있다. 2014년 이탈리아의 Benini 교수팀은 무선 센서 네트워크에 다중 측정 벡터들 모델을 적용 하였다. 그 결과, 센서의 숫자가 많을수록, 각 센서당 취득해야 하는 샘플의 숫자를 줄일 수 있다는 것을 실험을 통해 제시 하였다 [2]. 본 논문에서는 이런 사례를 설명 할 수 있는 최신 분석 결과 [1]를 소개한다.

1) 교신저자

2) 다중 측정 벡터들 모델은 서로 다른 센싱 행렬을 쓰는 것과, 동일한 센싱 행렬을 쓰는 것으로 나뉠 수 있다. 이 논문에서는 서로 다른 센싱 행렬을 쓰는 다중 측정 벡터들 모델을 다룬다.

II. 본론

2.1 다중 측정 벡터들 모델

크기가 $N\times1$이고 K개의 0이 아닌 값들을 가지고 있는 s번째 희소 벡터 x^s는 압축됨으로써, 다음과 같은 $M\times1$의 측정 벡터를 만든다.

$$y^s = F^s x^s + n^s \tag{1}$$

$s=1,2,...,S$, F^s 는 $M\times N$ 의 센싱 행렬로써 각 원소들은 정규 분포를 따르고 n^s는 $M\times1$의 잡음 벡터로써 각 원소들은 평균이 0이고 분산이 σ^2인 가우시안 분포를 따른다. 또한, 각 희소 신호들의 0이 아닌 값들의 위치를 나타내기 위해 support set을 다음과 같이 정의 한다.

$$\mathrm{supp}(x_s) := \{i | x^s(i) \neq 0\}.$$

다중 측정 벡터들 모델에서는 다음과 같이 모든 희소 신호들의 support set이 같은 특징을 지닌다.

$$I = \mathrm{supp}(x_1) = \mathrm{supp}(x_2) = \ldots = \mathrm{supp}(x_S).$$

따라서 다중 측정 벡터들 모델에서는 support set을 찾는다면 모든 신호들을 복원 할 수 있다.

2.1 분석 툴 소개

다중 측정 벡터들 모델을 분석하기 위해, [1]에서 다음과 같은 의사 결정 규칙 (decision rule)을 사용하는 가상의 joint typical decoder를 소개 하였다.

$$\left| \left(\sum_{s=1}^{S} \| Q(F_J^s) y^s \|_2^2 \right) - S(M-K)\sigma^2 \right| < SM\delta \tag{2}$$

여기서 F_J^s 는 집합 J의 원소에 대응하는 F^s의 열벡터들로 구성된 부분 행렬이고, l_2-norm안에 있는 값은 다음과 같다.

$$Q(F_J^s) y^s = y^s - F_J^s \left(F_J^s (F_J^s)^T \right)^{-1} (F_J^s)^T.$$

즉, s번째 측정 벡터 y^s를 F_J^s의 열벡터들로 구성된 공간에 직교하는 공간으로 투사하는 함수이다.

디코더는 모든 측정 벡터들 및 센싱 행렬들을 알고 있을 때, 임의의 양수 δ에 대해서 위 식 (2)을 만족시키는 집합 J를 추정된 support set이라고 선언한다.

디코더를 분석하기 위해서 다음 두 가지의 실패 사건들을 소개하였다. 첫 번째로, 실제 support set과 임의의 양수 δ에 대해 아래 수식을 만족하는 경우이다.

$$\varepsilon_I^c := \left\{ \left| \left(\sum_{s=1}^{S} \| Q(F_I^s) y^s \|_2^2 \right) - S(M-K)\sigma^2 \right| \geq SM\delta \right\}$$

즉 실제 support set을 support set이라고 결정하지 못했을 경우이다. 두 번째로, 실제 support set이 아닌 것이 임의의 양수δ에 대해 다음 아래 수식을 만족하는 경우이다.

$$\varepsilon_J := \left\{ \left| \left(\sum_{s=1}^{S} \| Q(F_J^s) y^s \|_2^2 \right) - S(M-K)\sigma^2 \right| < SM\delta \right\}$$

즉 잘못된 set을 support set이라고 선언한 것이다. 이제 이 2개의 사건들을 이용하면 joint typical decoder의 에러 확률을 다음과 같이 정의 할 수 있다.

$$\begin{aligned} p_{err} &:= \mathbb{P}\{I \neq \hat{I} | x^1, x^2, \ldots, x^S\} \\ &= \mathbb{P}\left\{ \varepsilon_I^c \bigcup_{J \in H \setminus I} \varepsilon_J \right\} \\ &\leq \mathbb{P}\{\varepsilon_I^c\} + \sum_{J \in H \setminus I} \mathbb{P}\{\varepsilon_J\} \end{aligned} \tag{3}$$

여기서 $\hat{I}$는 디코더가 찾은 집합이고, H는 다음과 같이 집합들을 원소로 가지고 있는 집합이다.

$$H := \{J | J \subset \{1,2,\ldots,N\}, |J| = K\}.$$

[1]에서 나온 것처럼, l_2-norm 안에 있는 값들이 각 이벤트의 랜덤 변수 (random variable)이고, 이 변수들은 모두 quadratic random variable 이다. [1]에서는 이벤트들의 확률의 상한 값을 얻기 위해 chernoff bound를 사용하였고, 그 결과는 다음과 같다.

Lemma 1[1]: 임의의 양수 δ , 다음 bound가 성립한다.

$$\mathbb{P}\{\varepsilon_I^c\} \leq 2\exp\left(-\frac{SM\delta}{2\sigma^2}\right)\left(1+\frac{M\delta}{(M-K)\sigma^2}\right)^{\frac{S(M-K)}{2}}.$$

Lemma 2[1]: 임의의 양수

$$\mathbb{P}\{\varepsilon_J\} \leq \exp\left(-\frac{S(M-K)}{2}\left(\frac{(M-K)\sigma^2+M\delta}{(M-K)(\sigma^2+x_{\min}^2)}-1\right)\right) \times \left(\frac{(M-K)\sigma^2+M\delta}{(M-K)(\sigma^2+x_{\min}^2)}\right)^{\frac{S(M-K)}{2}}.$$

여기서 $x_{\min}$는 모든 희소 신호들의 0이 아닌 값들 중의 크기 (magnitude)가 가장 작은 값이다.

위에 제시된 lemmas들의 증명과 자세한 설명은 [1]에 제시되어있다.

2.3 결과 활용

앞에서 언급한 Benini 교수팀 [2]의 결과를 위에 제시된 결과를 이용하면 다음과 같이 설명할 수 있다. 먼저, 센서의 숫자, 센서가 취득한 원 신호의 크기 및 센서가 전송하는 데이터의 크기 및 희소치를 각각 S, N, M, K로 생각할 수 있다. 이제, $M > K$ 라는 가정 하에서, S값를 증가시키면 각 이벤트들의 확률의 상한 값을 0으로 수렴 하는 것을 확인 할 수 있다. 이에 대한 증명은 [1]에 제시되어있다. 따라서 각각의 상한 값들이 0으로 수렴되기 때문에 디코더가 실패할 확률이 0으로 수렴한다. 즉, 센서의 숫자가 증가함에 따라, 각 센서당 전송 하는 데이터의 크기는 종래에는 $K+1$로 수렴하는 것을 이론적으로 설명 할 수 있다.

Ⅲ. 결론

본 논문에서는 압축센싱에서의 다중 측정 벡터들 모델의 최신 분석 결과 [1]을 소개 하였다. 또한, 분석 결과를 활용하여 [2]에서 실험을 통해 제시된 무선 센서 네트워크에서의 다중 측정 벡터들 모델의 이점 - 센서의 숫자가 증가함에 따라 각 센서당 보내는 데이터의 크기가 줄어드는 것 -을 이론적으로 설명 하였다.

참고문헌

[1] Sangjun Park, Nam Yul Yu, 그리고 Heung-No Lee, "An information-theoretic study for noisy multiple measurement vectors with different sensing matrices", Accepted for IEEE Trans. on Information Theory, 2017.

[2] C. Caione, D. Brunelli 그리고 L. Benini, "Compressive sensing optimization for signal ensembles in WSNs," IEEE Trans. on Industrial Informatics, vol. 10, no. 1, pp. 382 - 392, Feb. 2014.

[3] C. E. Shannon, "A mathematical theory of communication," The Bell System Technical Journal, vol. 27, pp. 379 - 423, 623 - 656, Jul. Oct. 1948

[3] D. Donoho, "Compressed sensing", IEEE Trans. on Information Theory, vol. 52, no. 4, pp. 1289 - 1306, Apr. 2006.