

Modulated Wideband Converter 를 위한 혼합 시퀀스의 조건

장재혁^o, 유남열, 이흥노

광주과학기술원 정보통신공학부

Requirements on Mixing Sequences of Modulated Wideband Converters

Jehyuk Jang^o, Nam Yul Yu, and Heung-No Lee

School of Information and Communications, Gwangju Institute of Science and Technology

jyh2014@gist.ac.kr, nyu@gist.ac.kr, and heungno@gist.ac.kr

요 약

Modulated wideband converter (MWC)는 다수의 혼합 시퀀스를 사용하는 sub-Nyquist 표본화 기법이다. 본 논문에서는, MWC 에 사용되는 혼합 시퀀스들의 패턴들이 한 기준패턴의 랜덤 shift 일 경우에 대하여 다루며, 기준패턴이 유효하기 위한 필요충분조건에 대해 논한다.

1. 서론

광대역의 신호에 대해, 만약 주파수 영역에서 신호가 희소하다면 무손실 sub-Nyquist 표본화가 압축 센싱 이론에 의해 가능하다 [1], [2]. 여러 sub-Nyquist 표본화 기법 중, modulated wideband converter (MWC) [2]는 입력 신호를 주기성을 갖는 다수의 고속 시퀀스와 병렬적으로 혼합함으로써, 신호를 압축하여 sub-Nyquist 표본화를 수행한다. 이 때, sub-Nyquist 표본으로부터 입력 신호의 복원은 혼합 시퀀스 패턴의 선택과 관련이 있다.

문헌 [2]에서는, 각 시퀀스의 패턴이 독립적으로 랜덤하게 선택 될 때 복원이 가능함을 보였다. 메모리 관점에서 보다 효율적인 시퀀스 생성을 위하여, [3]과 [4]에서는 모든 시퀀스의 패턴들이 maximal length sequence 혹은 Legendre sequence 와 같은 two-level autocorrelation 시퀀스를 랜덤 shift 하여 재사용할 경우 복원이 가능함을 이론적으로 보였다.

본 논문에서는, [3]과 [4]보다 일반적인 경우인, MWC 에서 모든 시퀀스의 패턴들이 임의로 생성된 패턴의 랜덤 shift 인 경우에 대해 입력 신호의 복원을 위한 필요충분 조건을 제시한다.

2. Modulated Wideband Converters

MWC 는 N 개의 협대역 성분들로 구성된 주파수 희소 입력 신호 $x(t)$ 를 m 개의 공간적 채널에서 병렬적으로 처리한다 [2]. 여기서 입력 신호의 개별 최대 대역폭을 f_p , 그리고 Nyquist rate 를 f_{mq} 라 할 때, MWC 의 각 채널은 약 f_{mq} 의 속도로 패턴이 변화하고 f_p 의 주기를 갖는 고속 시퀀스를 입력신호에 혼합한다. 이후, 각 채널의 혼합 신호는 $f_p/2$ 의

cut-off 주파수를 갖는 저역 여파기를 통과한다. 고속 시퀀스와 저역 여파기에 의해 압축된 신호는 f_p 의 속도로 표본화 되어 길이 l 의 sub-Nyquist 표본 시퀀스를 생산한다.

한편, 모든 채널의 혼합 시퀀스가 길이 $M \approx f_{mq} f_p^{-1}$ 인 하나의 기준 패턴을 중복 없이 랜덤 cyclic shift 하여 재사용 할 경우, 혼합 시퀀스 생성 단의 하드웨어 복잡도를 줄일 수 있다 [3], [4]. 이러한 MWC 는 다음과 같은 선형 시스템 모델을 갖는다.

$$\mathbf{Y} = \mathbf{R}_\Omega \mathbf{F} \Sigma \mathbf{Z} \quad (1)$$

여기서, $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{m \times l}$ 의 각 행은 sub-Nyquist 표본시퀀스들로 구성되어 있으며, $m \times M$ 행렬인 \mathbf{R}_Ω 의 각 행은 $M \times M$ 의 discrete-Fourier 행렬인 \mathbf{F} 의 행 하나를 중복 없이 랜덤하게 취하도록 설계 된다. 대각 행렬인 Σ 의 대각 성분은 혼합 시퀀스들의 기준 패턴의 discrete-Fourier 역변환 (IDFT) 성분들로 구성된다. 마지막으로, $\mathbf{Z} \in \mathbb{C}^{M \times l}$ 의 각 행은 $\left[\text{LPF}\{x(t)e^{j2\pi f_k t}\} \right]_{t=nf_p^{-1}}$ for $n=0, \dots, l-1$ 의 저속 표본들로 구성되어 있는데, 여기서 $\text{LPF}\{\cdot\}$ 는 저역 여파 연산을 나타내며 f_k 는 다음과 같이 정의된다.

$$f_k := \begin{cases} (k-1)f_p & \text{if } k \leq (M+1)/2 \\ (k-1-M)f_p & \text{if } k > (M+1)/2 \end{cases}$$

입력 신호가 주파수영역에서 희소(sparse) 하기 때문에 각 대역별 sub-Nyquist 표본이 저장된 \mathbf{Z} 는 sparsity $K=2N$ 를 갖는 row-sparse 행렬이다 [2]. 최종적으로 \mathbf{Z} 를 혼합 압축된 저속 표본 \mathbf{Y} 로부터 복

원 하는 과정은 압축센싱 문제이며, 구체적인 복원 알고리즘들은 [5]에서 제공된다.

압축센싱 문제에서, 측정행렬 설계의 타당성 검증 을 위해, restricted isometry property (RIP) [1]는 모델 $\mathbf{y} = \Phi \mathbf{x}$ 에서 측정행렬 Φ 의 모든 희소 벡터 \mathbf{x} 에 대한 유사 직교성을 측정한다. 예를 들어 (1)의 모델에서 Σ 가 unitary 행렬이면, $\Phi = \mathbf{R}_\Omega \mathbf{F} \Sigma$ 가 RIP 를 높은 확률로 만족함이 알려져 있다 [3], [4].

3. 기준 패턴에 대한 필요 충분조건

문헌 [3]와 [4]에서는, 모델 (1)의 \mathbf{Z} 가 복원 되기 위한 충분 조건은 Σ 가 unitary 행렬, 즉 기준 패턴의 IDFT 성분들이 균등한 크기를 가지는 것임을 보였다. 그러나 이러한 충분조건을 만족하는 bipolar 패턴은 $M=4$ 일 때만 존재하는 것으로 알려져 있다. 입력 신호가 저대역 성분을 가지지 않는다는 가정을 바탕으로 two-level autocorrelation 패턴으로도 위의 충분조건을 만족 시킬 수는 있지만, 이 경우 기준 패턴의 길이 M 에 대한 제약에 의해 MWC 시스템 설계의 유연성이 저하된다. 한편, 위의 충분 조건을 만족시키는 non-bipolar 패턴을 설계하는 것은 잘 알려져 있지만, 다중 level 혹은 bias 를 갖는 시퀀스 생성기는 높은 복잡도가 요구된다. 따라서, 본 논문은 IDFT 성분이 불균등한 크기를 갖는 기준 패턴을 사용하는 경우를 고려하였으며, 이를 위해 정리 1 은 \mathbf{Z} 의 복원에 대한 필요충분조건을 설명 한다.

정리 1. 모델 (1)이 $m \geq O(K \ln^4 M)$ 일 때, \mathbf{Z} 의 복원이 보장되기 위한 필요충분조건은 기준패턴의 IDFT 의 모든 성분이 0 이 아닐 때, 즉 Σ 가 invertible 일 때 이다.

증명. $\mathbf{X} = \Sigma \mathbf{Z}$ 라 하자. 모델 (1)에서, 만약 대각행렬 Σ 가 invertible 이면, \mathbf{X} 의 sparsity 도 K 로 유지되기 때문에, $m \geq O(K \ln^4 M)$ 일 때 \mathbf{Y} 로부터 \mathbf{X} 를 복원 하는 것은 $\Phi = \mathbf{R}_\Omega \mathbf{F}$ 의 RIP 에 의해 보장된다 [6]. \mathbf{X} 가 복원 된 경우, Σ 가 invertible 이면 \mathbf{Z} 가 \mathbf{X} 로부터 유일하게 결정되는 자명하다. 역으로, 만약 Σ 의 적어도 하나의 대각성분이 0 이라면, \mathbf{X} 의 복원 성공여부와 관계없이 \mathbf{Z} 는 유일하게 결정되지 못한다.

문헌 [3]와 [4]과는 다르게, 본 논문은 $\Phi = \mathbf{R}_\Omega \mathbf{F}$ 를 측정행렬로써 간주하였다. 그 결과, 기준패턴의 IDFT 성분들의 크기가 균등하지 않더라도, 0 인 성분이 존재하지 않는다면 이론적으로 \mathbf{Z} 의 복원이 보장됨을 밝혔다. 정리 1 의 필요충분 조건은 [3]와 [4]의 충분조건보다 더 일반적이며, 이는 임의로 생성된 bipolar 패턴이 기준패턴으로 사용 될 수 있도록 한다.

그림 1은 noiseless, 그리고 $M=127$, $K=8$, $l=12$ 의 환경에서 기준패턴의 선택과 채널 수 m 의 변화에 따른 \mathbf{Z} 의 empirical support recovery rate 를 나타낸다. Support recovery 에는 MMVOMP [5]가 사용되었다. 실험에서는, 입력 신호가 저대역 성분을 갖지 않도록 설계함으로써 maximal length sequence 의 IDFT 성분의 크기가 균등하다고 간주하였다 [3], [4]. 또한, 비교를 위해 임의로 생성된 두 종류의 Bernoulli 패턴들의 IDFT 성분은 그 크기가 불균등하며 0 이 아니다. 그림 1은 임의 생성된 Bernoulli 패턴들이 기준패턴으로 사용되었을 때에도 \mathbf{Z} 의 support 가 복원됨을 실험을 통해 보이고 있으며, 이는 정리 1 의 결과를 뒷받침한다.

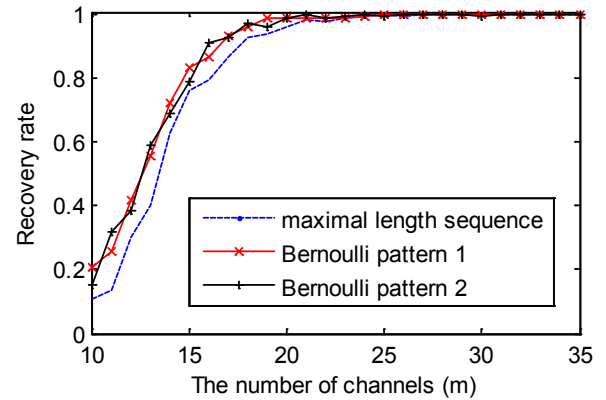


그림 1. $M=127$, $K=8$, $l=12$, noiseless 환경에서 채널 수 m 의 변화에 따른 support recovery rate

4. 참고 문헌

- [1] E. J. Candès and T. Tao, "Decoding by linear programming," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 51, no. 12, pp. 4203-4215, Dec. 2005.
- [2] M. Mishali and Y. C. Eldar, "From theory to practice: Sub-Nyquist sampling of sparse wideband analog signals," *IEEE J. Sel. Topics Signal Process.*, vol. 4, no. 2, pp. 375-391, Apr. 2010.
- [3] L. Gan and H. Wang, "Deterministic binary sequences for modulated wideband converter," in *Proc. Int. Conf. Sampling Theory Appl. (SAMPTA)*, Bremen, German, Jul. 2013, pp. 264-267.
- [4] J. Zhang, N. Fu, and X. Peng, "Compressive circulant matrix based analog to information conversion," *IEEE Signal Process. Lett.*, vol. 21, No. 4, pp. 428-431, Apr. 2014.
- [5] J. Chen and X. Huo, "Theoretical results on sparse representations of multiple measurement vectors," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 54, no. 12, pp. 4634-4643, Dec. 2006.
- [6] S. Foucart and H. Rauhut, *A Mathematical Introduction to Compressive Sensing (Applied and Numerical Harmonic Analysis)*. Basel, Switzerland: Birkhuser, 2013.