희소한 가중 그래프 상에서의 압축센싱 복구 방법

최해웅°, 이흥노

광주과학기술원 정보통신공학부

Compressive Sensing Recovery Method in the Sparse Weighted Graphs

Haeung Choi°, and Heung-No Lee

School of Information and Communications, Gwangju Institute of Science and Technology (GIST)

haeung@gist.ac.kr, heungno@gist.ac.kr

요 약

압축센싱을 이용한 실제 어플리케이션에서는 신호의 형태 및 센싱행렬의 형태에 대한 제한이 많다. 본 논문에서는 이 중에서도 특히 음의 값을 가지지 않는 신호를 입력으로 하는 한편 센싱행렬의 형태가 희소한 가중 그래프인 경우에 적합한 복구 알고리즘을 소개한다.

1. 서론

압축센싱은 센싱행렬을 사용하여 희소한 원 신호 벡터를 더 낮은 차원의 측정 벡터로 변환하고, 이 측정 벡터로부터 원 신호를 복구 가능하다는 이론이다 [1]. [2] 및 [3] 등의 연구들이 압축센싱을 이용한 실제 샘플링 장치의 구현 가능함을 보인 이후로부터 다양한 어플리케이션들에 압축센싱을 적용하여 그 성능을 높이려는 시도들이 있어왔다.

압축센싱을 사용한 실제 어플리케이션에서의 성능향상을 위해서는 해당 시스템의 신호 및 센싱행렬의 형태에 따른 최적의 복구 알고리즘을 선택해야 한다.

본 논문에서는 신호가 음의 값을 가지지 않는 경우, 그 중에서도 센싱행렬이 희소한 가중 그래프의 형태를 가지는 경우에 사용할 수 있는 복구 알고리즘을 소개한다.

2. 실제 하드웨어 구현에서의 특징

압축센싱을 사용한 시스템을 다음과 같은 선형 방정식으로 나타낼 수 있는데,

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

여기서 $\mathbf{x}$ 는 희소한 $N\times 1$ 신호 벡터, $\mathbf{y}$ 는 $M\times 1$ 측정 벡터, $\mathbf{A}$ 를 $M\times N$ 센싱행렬로 정의한다. 이때 $N > M$ 이므로 $N\times 1$ 신호 벡터가 더 낮은 차원인 $M\times 1$ 측정벡터로 압축된다

본 논문에서는 원 신호 벡터의 값들과 측정 벡터의 값들을 노드로 생각했을 때, 이 원 신호 벡터와 측정 벡터간에 희소한 가중 그래프 형태의 관계가 있는 시나리오에 대해 생각한다. 이러한 경우 측정 벡터 $\mathbf{y}$ 의 한 원소 y_j 는 신호 벡터 $\mathbf{x}$ 의 원소들 중 몇몇개의 가중합(weighted sum) 형태로 나타낼 수 있다. 즉,

$$y_j = \sum_{i=1}^{N} a_{i,j} x_i$$

이 때, 가중치 $a_{i,j}$ 는 희소한 가중 그래프인 $\mathbf{A}$ 의 한 원소 이므로 대다수 원소들은 0 값을 지니고, 나머지 일부만 0 이 아닌 값을 가진다. 이러한 형태의 센싱 시나리오는 많은 경우에서 유용한데, 특히 가중치가 실수 전체 집합의 원소가 아니라 특정한 몇몇 값 만을 가질 수 있는 경우에 매우 유용하다. 대다수 압축센싱 복구 알고리즘들은 센싱행렬의 각 원소가 임의의 실수값을 가질 수 있는 랜덤 센싱행렬을 가정한다. 하지만 실제 하드웨어는 가질 수 있는 상태(state)가 한정적이므로, 센싱행렬 각 원소의 값이 유한한 개수의 양자화된 값들 중에서 선택된다고 생각하는 것이 합리적이다. 그 중에서도 특히 0 의 가중치는 해당하는 신호 원소 x_i 와 y_j 간에 관계가 없음을 의미하는 값으로, 하드웨어적 구현이 매우 쉽다.

실제 많은 압축센싱 구현 장치들이 희소한 가중 그래프 형태의 센싱행렬을 가진다. single pixel camera [2] 의 경우를 예로 들자면, 해당 시스템은 DMD 어레이의 on/off 패턴에 따라 1 과 0 으로만 구성된 이진행렬을 센싱행렬로 가지는데, 이는 희소한 가중 그래프중 가장 간단한 형태임을 알 수 있다.

3. 신뢰전파(Belief Propagation)

희소한 가중 그래프 상에서의 압축센싱 복구를 위해, 본 논문에서는 신뢰전파(Belief Propagation) 기반의 알고리즘을 사용하였다. 신뢰전파는 2 부 그래프(bipartite graph) 상에서 동작하는 베이지안 사후확률 (Bayesian posteriori probability) 계산 알고리즘이다. 에지(edge)를 통해 연결된 노드들이 근처 노드의 확률 정보를 이용해 계산한 로컬 정보(메시지)를 교환하며 자신의 상태를 갱신하는 것을 주요 골자로

한다. 원 신호 벡터 $\mathbf{x}$ 의 각 원소들을 변수 노드(Variable nodes), 측정 벡터 $\mathbf{y}$ 의 각 원소들을 인자 노드(Factor nodes)라 두면, 변수 노드들의 사후 확률 계산은 다음과 같이 이루어진다.

i) Variable to Factor 업데이트

변수노드 x_v 로부터 인자노드 y_f 로 전달되는 메시지 $\mu_{v\to f}$ 는 y_f 를 제외한 다른 인자노드들로부터 계산한 x_v 의 확률 분포로 정의한다. 만약 인자노드 y_f 에서 변수노드 x_f 로 전달되는 메시지 $\mu_{f\to v}$ 을 y_f 와 연결된 변수노드 x_i 들로부터 계산한 x_v 의 확률 분포라 하면, Variable to Factor 메시지 $\mu_{v\to f}$ 는

$$\mu_{v\to f} = \prod_{j\in n(v)\backslash f} \mu_{j\to v}$$

로 나타낼 수 있다. 여기서 $n(v)$ 는 변수노드 x_v 와 연결된 인자노드들의 인덱스의 집합으로 정의한다.

ii) Factor to Variable 업데이트

앞서 인자노드 y_f 에서 변수노드 x_f 로 전달되는 메시지 $\mu_{f\to v}$ 을 y_f 와 연결된 변수노드 x_i 들로부터 계산한 x_v 의 확률 분포로 정의하였다. 따라서 Factor to Variable 메시지 $\mu_{f\to v}$ 는 x_v 이외의 변수 노드로부터의 Variable to Factor 메시지들을 각 에지의 가중치 만큼 스케일링(scaling) 한 후 콘볼루션(convolution) 하여 구할 수 있다. 즉,

$$\mu_{f\to v} = f_{\frac{y_f - R}{a_{f,v}}}\left(\frac{y_f - r}{a_{f,v}}\right)$$

이 때, 랜덤변수 R 에 대한 확률밀도함수는,

$$f_R(r) = \underset{i\in n(f)\backslash v}{\otimes} Sc\left(\mu_{i\to f}, a_{f,v}\right)$$

로 나타낼 수 있다. 여기서 $Sc(\mu,a)$ 는 메시지 μ 를 상수 a 만큼 스케일링 한 함수이며, $\otimes(\bullet)$ 는 콘볼루션 연산자, $n(f)$ 는 인자노드 y_f 와 연결된 변수노드의 인덱스의 집합으로 정의한다.

iii) 사후 확률 업데이트

모든 메시지가 수렴할 때 까지 Variable to Factor 업데이트와 Factor to Variable 업데이트를 반복한 후, 각 변수 노드에서 해당 노드와 연결된 모든 인자노드로부터의 Factor to Variable 메시지를 곱하여 사후 확률을 계산할 수 있다. 이를 수식으로 나타내면,

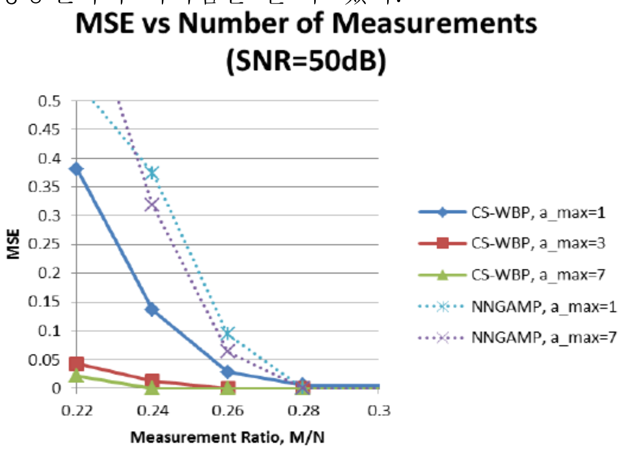
$$f_{X_v}(x_v) = \frac{1}{Z}\prod_{j\in n(v)} \mu_{j\to v}$$

여기서 Z 는 사후 확률 분포의 적분값이 1 이 되도록 하는 표준화 상수이다.

4. 알고리즘 비교

본 논문에서는 상술한 신뢰전파를 기반으로 하여 사후 확률 분포를 계산한 뒤 그에 따른 Maximum a posterior(MAP) 추정값을 출력으로 하는 압축센싱 복구 알고리즘 CS-WBP 를 구현하고 이를 Non-negative Generalized Approximate Message Passing (NNGAMP)[4] 알고리즘과 비교하였다. 원 신호 벡터의 길이 $N = 500$, nonzero 값을 가지는 원소의 개수 $K = 50$ 을 사용하였고, 센싱행렬로는 nonzero 값을 5 개 가지는 열벡터들로 구성된 희소 가중 그래프를 사용하였다. 50dB 의 SNR 을 가정하였다. 0 을 제외하고 가중치가 가질 수 있는 값의 개수를 $a_{\max}$ 로 정의하고 $a_{\max} = 1,3,7$ 의 경우에 대해 시뮬레이션 하여 각각의 경우에서 M/N 비율에 따른 Mean Square Error(MSE)를 비교하였다.

그림에서 확인할 수 있듯이, 제안된 방법 CS-WBP 가 가우시안 랜덤 센싱행렬에 최적화된 NNGAMP 보다 더 좋은 성능을 보이는 것을 알 수 있다. 또한 CS-WBP 는 $a_{\max}$ 가 증가함에 따라 성능이 더욱 향상되는 반면 NNGAMP 는 $a_{\max}$ 에 따른 성능변화가 미미함을 볼 수 있다.



5. 참고 문헌

[1] D. L. Donoho, “Compressed Sensing,” *IEEE Trans. On. Info. Theory*, vol. 52, no. 4, pp. 1289-1306, 2006.

[2] D. Takhar, J. N. Laska, M. B. Wakin, M. F. Duarte, D. Baron, S. Sarvotham, K. F. Kelly and R. G. Baraniuk, “A New Compressive Imaging Camera Architecture using Optical-Domain Compression,” *Proc. IS&T/SPIE Computational Imaging IV*, 2006.

[3] M. Mishali and Y. C. Eldar, “From Theory to Practice: Sub-Nyquist Sampling of Sparse Wideband Analog Signals,” *IEEE J. Sel. Topics on. Signal Process.*, vol. 4, no. 2, pp. 375-391, 2010.

[4] J. P. Vila and P. Schniter, “An Empirical-Bayes Approach to Recovering Linearly Constrained Non-Negative Sparse Signals,” *IEEE Trans. On. Signal Process.*, vol. 62, no. 18, pp.4689-4703, 2014.

6. Acknowledgement

This work was supported by the National Research Foundation of Korea (NRF) grant funded by the Korean government (MSIP) (NRF-2015R1A2A1A05001826)