특정 측정 행렬을 이용한 이진 신호 복구

박순철, 장환철, 이흥노

광주과학기술원

scp@gist.ac.kr, hcjang@gist.ac.kr, heungno@gist.ac.kr

Reconstruction of binary signal using specially designed measurement matrix

Soonchul Park, Hwanchol Jang, Heungno Lee

Gwangju Institute of Science and Technology

요 약

이 논문에서는 최근에 학계에서 많은 관심을 받고 있는 Compressive Sensing (CS)이라는 새로운 연구분야에서 최적의 측정 행렬을 이용하여 이진 신호를 복구할 때 가지는 성질과 복구 방법에 관한 연구 결과를 논하였다. 여기서 신호가 충분히 sparse 하다면 복잡한 계산 없이 매우 효과적으로 신호를 복구할 수 있다는 것을 증명 하였다.

Ⅰ. 서 론

신호의 최고 주파수의 2 배 이상으로 sampling 을 하면 그 신호를 정확하게 다시 아날로그 신호로 복원할 수 있다. 이것이 바로 Shannon-Nyquist sampling 이론인데, 오늘날까지 이 이론은 디지털 시스템을 구축하는 기초이론으로 충실 되게 이용되어 왔다. CS 이론은 신호를 Nyquist rate 이상으로 sampling 하지 않아도, 완전하게 신호를 재생할 수 있는 경우를 다루는 것이다[1][2]. Sparse 신호는 Nyquist rate 보다 적은 수의 선형측정 (linear measurements)만으로도 원래의 신호를 거의 완벽하게 복원시킬 수 있다고 말하는 Compressive Sensing (CS) 이론의 핵심은 다음 등식의 해를 찾는 것으로 요약 할 수 있다:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}. \tag{1}$$

위와 같은 선형 측정 식이 있을 때, 원래의 신호 $\mathbf{x}$ 로부터 어떤 행렬을 곱해서 얻은 $\mathbf{y}$ 를 선형 측정된 신호라고 정의 한다. 이 때 A 는 $M \times N$ 행렬이고 일반적으로 M은 N에 비해서 작은 값을 가진다.

행렬 A 의 열을 $\mathbf{a}_i, i = 1, 2, \cdots, N$ 이라 하고, 이들이 각각 정규화(L2 norm 이 1 이 되도록) 되어 있을 때, 최대 상호상관 값은 다음과 같이 정의 된다:

$$\mu(\mathbf{A}) = \max_{i,j} \left| \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle \right|.$$

선형측정 행렬 A 는 복구된 해의 정확도와 밀접한 관련이 있기 때문에 최대 상호상관 값 역시 복구된 해의 정확도와 밀접하게 관계한다.

우리는 CS 기본식 (1)을 만족하는 해는 무수히 많이 존재하는 것을 안다. 하지만 신호 $\mathbf{x}$ 가 k-sparse 신호일 때, L0 최소화를 통해 $\mathbf{x}$ 를 유일하게 복구하려면, 다음조건

$$\|\mathbf{x}\|_0 < 1/\mu(\mathbf{A}) \tag{2}$$

이 만족되어야 한다[3]. 즉 선형 측정 행렬의 최대 상호상관 값이 작으면 작을 수록 더 많은 정보를 복구할 수 있기 때문에 더 좋은 선형 측정 행렬이라고 간주할 수 있다.

L0 최소화는 계산 복잡도가 너무 높아 비 현실적이어서 L1 최소화를 이용하려는 연구가 많이 있어 왔다. 하지만 L1 최소화를 사용하면, (2)의 조건은 L1 최소화 해가 L0 최소화 해와 일치한다는 보장을 주지 않는다. L0 최소화 해와 L1 최소화 해는 일치할 조건은 다음과 같다[3]:

$$k = \|\mathbf{x}\|_0 < \tfrac{1}{2}\left(1 + \tfrac{1}{\mu(\mathbf{A})}\right) \tag{3}$$

크기가 $M \times N$ 인 선형 측정 행렬 A 가 주어졌을 때, $\mu(\mathbf{A})$ 의 lower bound 는 다음과 같다[4]:

$$\mu(\mathbf{A}) \ge \sqrt{\tfrac{N-M}{M(N-1)}}. \tag{4}$$

신호의 복구는 최대 상호상관 값에 좌우 된다는 것은 잘 알려진 사실이다. $\mu(\mathbf{A})$ 가 작으면 작을수록 신호 복구가 더 완벽해진다. 그래서 우리는 가능하면 작은 $\mu(\mathbf{A})$ 를 가지는 측정 행렬을 찾으려고 한다. Grassmannian frames 을 이용하면 상호 상관 행렬의 모든 대각 원소들은 1 이고 그 외의 원소들은 식 (4)의 lower bound 인 $\mu(\mathbf{A})$ 가 되는 측정 행렬을 얻을 수 있다[4]. 본 논문의 나머지 부분에서는 Grassmannian frames 을 이용한 측정 행렬과 이진 신호 (0,1)를 가정 한다. 이는 다음의 다중접속 시스템에서 이용될 수 있다: 다수의 사용자가 동시에 접속할 때, 각 사용자는 측정 행렬에서 정해진 하나의 열을 자신의 고유 열 벡터로 사용 한다. 다수의 사용자 중에 접속하는 사용자들은 자신의 고유 열 벡터를 내 보내면, 동시에 수신된 신호들의 조합은 측정신호 y 가 된다. L1 최소화를 이용하여 신호를 복원하였을 때, 접속한 사용자의 신호 값은 1 이 되지만 신호를 보내지 않는 사용자의 신호 값은 0 이 되어 접속한 사용자와 접속하지 않은 사용자를 구분할 수 있게 된다.

Ⅱ. 본론

본 논문에서 x 를 이진 신호 벡터라 하고 $\mathbf{A}=[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_N]$ 를 Grassmannian frames 이용하여 얻은 측정 행렬이라 하자. 나머지 상관을 이용한 이진 신호 복구 액티브 방법은 다음과 같다.

초기화. 주어진 측정 행렬 A 와 측정 값 y 에 대하여, 액티브 집합을 공집합으로 하고 복원할 신호 벡터를 영 벡터라 하고 시작하며 나머지 상관을 구한다: $I=\varnothing$, $\mathbf{x}=\mathbf{0}$, $\mathbf{c}=\mathbf{A}^T\mathbf{y}$. 그러면 각각의 나머지 상관 값은 다음과 같다. $-k\mu \le c_i \le 1+(k-1)\mu$ for all i .

최고 나머지 상관 값을 구하고 액티브 집합에 들어갈 인덱스를 모두 찾는다: $\lambda=\|\mathbf{c}\|_\infty$, $I^+=\{i\notin I \mid c_i=\lambda\}$.

액티브 집합과 추정 신호 값 그리고 나머지 상관을 업데이트 한다: $x_i=1,\ \text{for } i\in I^+$, $I=I\cup I^+$, $\mathbf{c}=\mathbf{A}^T(\mathbf{y}-\mathbf{A}\mathbf{x})$.

만약 $\|\mathbf{c}\|_\infty=0$ 이면 알고리즘을 끝내고

$$\min\|\mathbf{y}-\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2 \quad \text{subject to} \quad x_i=0 \text{ or } 1$$

문제의 해를 구하게 된다.

이렇게 특별히 잘 디자인된 측정 행렬을 사용하여 이진 신호를 복구할 때 가지는 성질을 살펴보자. $\Omega=\{i \mid s_i=1\}$ 라 하면, $|\Omega|\le k.$ 이다. 여기서 $|\bullet|$ 는 집합의 원소의 개수를 나타낸다. 신호의 sparse 한 정도와 최고 상관 값이 식 (3)를 만족한다면, 다음 두 성질은 쉽게 증명할 수 있다.

1. $c_i \ge c_j$ for all $i\in\Omega,\ j\notin\Omega$.

2. $c_i > \left(1+(2|I|+1)\mu\right)/2$ for $i\in\Omega,\ i\notin I$,

$c_i < \left(1-(2|I|-1)\mu\right)/2$ for $i\notin\Omega,\ i\notin I$.

따라서, $c_i > c_j$ for all $i,j\notin I$, $i\in\Omega, j\notin\Omega$.

위의 성질들로부터 다음의 정리를 얻게 된다.

정리 1. $k<(\mu^{-1}+1)/2$ 라 하자. 이진 신호 복구 액티브 방법을 이용하면 k-sparse 이진 신호는 k 단계 이내에 그 해를 찾게 된다.

Ⅲ. 결론

본 논문에서는 최적의 측정 행렬을 이용하면 신호가 아주 sparse 한 이진 신호에 대하여 복잡한 계산 없이 매우 효과적으로 신호를 복구할 수 있다는 것을 보였다.

ACKNOWLEDGMENT

이 논문은 2011 년도 정부 (교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구임 (중견연구자-도약연구사업, N0. 2011-0016496)

참 고 문 헌

[1] David Donoho, “ Compressed sensing,” *IEEE Trans. on Information Theory*, 52(4), pp. 1289 - 1306, April, 2006.

[2] Donoho, D.L. and Tanner, J., "Precise Undersampling Theorems", *Proceedings of the IEEE,* vol. 98, pp 913 - 924, May, 2010.

[3] D. L. Donoho and X. Huo, “ Uncertainty principles and ideal atomic decomposition,” *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 47, pp. 2845- 2862, Nov. 2001.

[4] Thomas Strohmer and Robert W. Heath Jr., *Grassmannian Frames with Applications to Coding and Communications*, Appl. Comp. Harm. Anal., vol. 14, no. 3, pp. 257-275, 2003.